Llibres: Parlem de com s'ha de divulgar la matemàtica

Article de Josep Pla i Carrera
Facultat de Matemàtiques. Universitat de Barcelona.

En els darrers mesos he tingut ocasió de llegir dos llibres ben diferents. Tots dos tenen com a objectiu principal fer una presentació de la matemàtica que pugui ser entesa per un ventall ampli de lectors. Aquests dos llibres són *The fontana History of the Mathematical Sciences*, d'Ivor Grattan-Guinnes, i *El dimoni dels nombres*, de Hans Magnus Enzensberger.
Constitueixen, al meu entendre, els dos pols oposats d'una mateixa experiència.

El dimoni dels nombres

El dimoni dels nombres de Hans Magnus Enzensberger.
Traducció de Maite Alcántara. Barcanova–Siruela. Madrid, 1997.

El segon d'aquests llibres —"Un llibre per a tot els qui tenen por de les Matemàtiques"— és un llibre absolutament fallit, negatiu, per no dir nefast. No pot ser aconsellat des de cap punt de vista. Vol ser un text *didàctic*, engrescador, que permeti una aproximació lúdica, divertida, amena a les matemàtiques i la seva problemàtica a través dels nombres. I, d'alguna manera, com podem constatar fent un cop d'ull a l'índex —"Llista per buscar i trobar"—, la informació que ofereix Enzensberger és molt àmplia per a un llibre com aquest.

Per què dic, doncs, que el considero un llibre negatiu? Em sembla que hi ha tres raons, almenys, per dir-ho, i intentaré posar-les de manifest.

Abans vull indicar a tots els qui llegeixin aquesta ressenya que no cal pas que estiguin d'acord amb aquestes opinions. Tanmateix però, els aconsellaria que, abans de recomanar-lo a ningú, el llegissin amb atenció i que no es deixessin dur per la propaganda editorial i dels medis. És possible que cada un d'ells pugui treure'n partit, passant per alt algunes de les seves limitacions, o bé completant les mancances amb aportacions personals. Malgrat tot, deixeu-m'hi insistir, tal com el presenta el seu il·lustre autor, és un llibre fallit.

Per entendre les meves objeccions cal que ens situem en tres aspectes ben diferenciats: el llibre com a llibre de matemàtiques; el llibre com a model didàctic, i el llibre com a alternativa a l'ensenyament de la matemàtica.

***El dimoni dels nombres* com a llibre de matemàtiques.** El llibre de l'assagista, "pot-ser avui, el més prestigiós d'Alemanya", és qualsevol cosa menys un llibre de matemàtiques, ni tan sols de matemàtiques elementals. I faig aquesta afirmació basant-me en tres fets que, al meu entendre, estan íntimament lligats en el quefer matemàtic. La matemàtica està feta d'intuïcions motivades per qüestions teòriques, o per qüestions més quotidianes del món físic i de la vida real. Aquestes intuïcions s'han d'abstreure del context en què les hem confegit. Ens proprocionen un grapat de preguntes bàsiques —i d'altres menys immediates— que cal establir. Ara bé, en matemàtiques, establir significa "provar". El joc demostratiu és consubstancial a les matemàtiques. La intuïció —que considero primordial i necessària— no és, en canvi, suficient. A més, la matemàtica és "acumulativa en espiral". Les idees i intuïcions d'un àmbit les retrobem moltes vegades en un àmbit més complex. Per això, quan s'aporta un coneixement matemàtic, s'ha de fer amb perspectiva. S'ha de donar amb un horitzó obert. Més encara, sempre és convenient insinuar aquestes possibles "generalitzacions".

Només em referiré a una qüestió de les moltes que es presenten en el text que estem comentant. La qüestió dels *nombres de primera* —que, de fet, són els nombres primers. L'autor presenta, un cop els ha definit, el garbell d'Eratòstenes que, com sabem, serveix per anar-los trobant. Seguidament però, posa de manifest la dificultat que suposa arribar a saber amb certesa si el nombre 141 421 356 237 307 és, o no és primer. El dimoni diu a Robert, *l'únic alumne que té*:

— "Són de primera o no, aquests? Si sapiguessis quants matemàtics 'de primera' s'han trencat les banyes pensant en això! Fins i tot els més notables d'entre els dimonis dels nombres fracassen tocant a aquest punt. [...]"

— "Sí, però que se'n treu, de trencar-se les banyes amb aquesta qüestió?" —pregunta Robert.

— "No facis preguntes ximples! Això és precisament el més emocionant. En el regne dels nombres les coses no són pas tan avorrides com amb el teu professor Bockel. Ell i les seves rosquilles! Hauries d'estar content que t'expliqui tots aquests secrets. [...]"

Tot seguit el dimoni planteja un parell de curiositats sobre els nombres primers:

- "Entre n i $2n+1$, amb $n \geqslant 1$, sempre hi ha, com a mínim, un nombre primer".
- "Tot nombre [parell] més gran que dos és la suma de dos nombres primers".

En aquest exemple hi trobem una situació paradigmàtica del llibre d'Enzensberger. S'introdueix un concepte sense que quedi clara la seva necessitat. Com un joc. Això, en principi, podríem pensar que és bo. El que és greu, al meu entendre, és que un cop l'ha introduït, el manté en el món dels jocs, de la il·lusió —en el sentit de màgia—, i mai no el converteix en una eina matemàtica. És incapaç de fer notar quina és la seva importància, ni tampoc quins lligams té amb d'altres qüestions, o encara quines aplicacions en podem treure.

Fixem-nos en com utilitza els dos exemples anteriors. Els presenta com si fossin de la mateixa naturalesa i, si bé és cert que, tot de passada, diu que el segon encara no s'ha pogut demostrar, la lectura del text per part d'algú que no sàpiga res de *teoremes* i de *conjectures*, el portarà a creure que són dos problemes del mateix tipus. Al meu entendre, no queda prou clara, ni ara ni quan s'acaba la lectura del llibre, la diferència que hi ha entre "saber-ho demostrar", "pensar que és cert", o bé "saber que és fals". I això és un dels fets que cal ensenyar a distingir en un text de matemàtiques.

Però, i això em sembla molt més greu, enlloc es parla del *teorema fonamental de l'aritmètica*. És a dir, el text passa per alt un dels resultats més importants dels nombres primers: "la possibilitat d'expressar qualsevol altre nombre com a producte de primers de forma única". Naturalment això impedeix, de retruc, parlar de la importància que té la "unicitat de la descomposició" en els sistemes numèrics amb divisibilitat. Aquest resultat li podia haver servit al dimoni dels nombres per justificar perquè la unitat no es considera un nombre primer, o per posar de manifest la diferència que hi ha entre fer descomposicions a $\mathbb{N}$ o a $\mathbb{Z}$.

Però, tal com es presenten els nombres primers —o nombres de primera—, s'impossibilita estendre el concepte, o deixar el terreny preparat per estendre, més endavant, les famílies numèriques, i veure que n'hi ha algunes en les quals aquesta propietat es manté, i d'altres en les quals pot fallar. La possibilitat d'obrir l'horitzó a la descomposició en l'anell de polinomis $\mathbb{Q}[X]$, o en qualsevol altre, deixant espai per a les unitats, etc., és absent.

Malgrat que es parla del teorema de Pitàgores, no es parla enlloc de les ternes pitagòriques i de la forma que han de tenir necessàriament, un resultat en la demostració del qual juga un paper notable la unicitat de descomposició, perquè cal recórrer al fet que, "tot quadrat perfecte, si descomposa en producte de dos factors que són primers entre si, aquests també han de ser quadrats perfectes". No s'esmenta el teorema darrer de Fermat, és clar!, i no es vincula amb la unicitat de descomposició, etc. Tampoc no es parla de les qüestions de distribució o de densitat dels nombres primers. En canvi es parla, vetlladament, del caràcter *fractal* dels nombres combinatoris, que és un resultat molt més anecdòtic i particular.

Se'm pot retreure que la meva crítica no val. De fet, es pot argumentar: "el que tu dius és que l'eminent assagista no ha escrit el llibre que tu hauries volgut llegir, o potser fins i tot escriure". Certament! No calia pas que *El dimoni dels nombres* tractés aquestes qüestions concretes. Però el que sí em sembla que tinc el dret de retreure-li és la incapacitat de vincular la necessitat d'estudiar i conèixer els nombres primers a quelcom matemàticament rellevant.

Podia recórrer a d'altres exemples, però no ho fa. No parla, per exemple, dels *nombres perfectes*, ni del fet que la dificultat per saber si un nombre natural és perfecte o no, està lligada amb la dificultat per saber si un nombre natural N de la forma $N = 2^n - 1$ és primer o no.

O finalment, per què no usa per exemple la *criptografia* elemental —o qualsevol altre qüestió d'índole més aplicada— per copsar la utilitat que els nombres primers, i el fet que, algunes presentacions senzilles, es basen en la universalitat i unicitat de la descomposició?

No ho sé! El que sí sé, i ho puc afirmar sense embuts, és que després d'haver llegir detingudament la nit dels nombres de primera no disposo de cap argument que em faci comprendre —llevat del fet estricte d'haver somniat— l'interès que pot tenir conèixer els nombres de primera.

***El dimoni dels nombres* com a model didàctic.** Em sembla que les objeccions que he fet a l'obra de l'insigne escriptor estan vinculades a una situació que, no perquè sigui cada cop més difícil de defensar i de dur a terme, hàgim d'oblidar. Aquest fet ens porta a respondre la gran pregunta: "què cal transmetre quan s'ensenyen, o fins i tot quan es divulguen les matemàtiques?"

No és pas la meva intenció —no en seria pas capaç— respondre aquesta pregunta, però tampoc vull passar-la completament per alt. Les matemàtiques es basen en intuïcions relatives als nombres, a la mesura, a la naturalesa i a les propietats de les figures geomètriques, a les eines i mètodes de resoldre, teòricament i pràctica, certs problemes. Saber transmetre aquestes intuïcions és important. Ensenyar a copsar-les també. Però, atenció!, per aconseguir-ho cal tenir un bagatge previ indispensable per saber de què parlem i de què no podem parlar. És veritat que, a voltes, hi ha qui té unes capacitats prèvies que l'ajuden a comprendre amb més facilitat allò que a d'altres els és força més difícil, però aquesta capacitat no és pas, en absolut, patrimoni de tots. Ben al contrari, més aviat és ben poc habitual.

Això ens porta a haver de transmetre eines i algorismes de càlcul: els nombres, i els seus algorismes; les funcions i la derivació; les figures geomètriques i les transformacions; etc. Cal aprendre a manejar-les amb molta naturalitat. Això obliga a "fer dits".

Tothom entén que ningú no arriba a ser un bon pianista, si no fa un grapat d'hores diàries de pràctica: ha d'aprendre a llegir amb soltura, i alhora ha de saber manejar les mans amb habilitat. És una tasca dura, tant pel qui l'exercita com pel qui la sofreix, però és indispensable —encara que això no significa pas que aquesta activitat i aprenentage sigui acceptat socialment. La raó és que molesta. Produeix soroll.

Qui pot arribar a ser un escriptor més o menys acceptable, o un pintor normal, si no ha esborronat molts fulls de paper o moltes teles? Ningú! El talent —malgrat que hi puguin haver disposicions naturals que el facilitin— no és suficient. Cal exercitar-lo.

Un text de matemàtiques no pot ser mai un bon text didàctic si no acompanya els seus ensenyaments, la presentació dels temes d'un bon grapat d'exercicis, i, naturalment, fer exercicis deixa de ser lúdic.

Se'm pot objectar dient que una cosa és un text de matemàtiques, didàctic o no, i una cosa ben diferent un text de *divulgació de les matemàtiques*. És possible que això sigui cert, però difícilment podem divulgar una ciència si en traïm la seva naturalesa.

La naturalesa de la matemàtica passa per comprendre l'entramat de les seves veritats. Passa, doncs, per entendre que *cal establir la validesa* d'allò que s'afirma. Cal resoldre, i cal demostrar.

Això ho comparteix Enzensberger que dedica una de les darreres nits a parlar de la importància de la demostració en matemàtiques. Ell, però, les evita. I la meva pregunta és: es pot parlar de matemàtiques sense entendre'n un dels seus aspectes més íntims? La resposta és que no. Penso que fer un llibre de matemàtiques —tant si és seriós com si és divulgatiu— només s'aconsegueix fent veure com funcionen íntimament les matemàtiques.

Es podria argumentar que, entendre una demostració, és molt difícil! Si un llibre conté demostracions, ningú no l'entén. Això fa que el lector torni a tenir por de les matemàtiques, que és el que volem evitar. Si el lector s'espanta, deixa de llegir-lo, i de comprar-lo. Això ho hem d'evitar, encara que sigui traint allò de què volem parlar!

Jo personalment discrepo totalment d'aquest plantejament! Ometre els raonaments que fan que les coses siguin d'una manera i no puguin ser d'una altra, és fer un trist favor a la matemàtica. Un bon text —tant si és didàctic com si és divulgatiu— s'hi ha de sotmetre necessàriament. Altrament, tot és màgic. Hi ha nombres que, quan els representem amb el sistema decimal, tenen infinites xifres. D'altres només en tenen un nombre finit. Uns presenten una certa periodicitat. D'altres, no! Però el fet realment important, consisteix a conèixer la resposta a la pregunta: això, per què és així? Què fa que les representacions numèriques siguin d'aquesta manera i no d'una altra?

No em vull estendre més, però deixeu-me fer una darrera puntualització. En el *Dimoni dels nombres* surten moltes expressions decimals, i es parla dels nombres *ximples*. Però mai no es justifica per què n'hi ha de ximples i de no ximples!

I no justificar el perquè d'un resultat matemàtic equival, de fet, a desconèixer el resultat matemàtic que es vol explicar. A més, porta amb facilitat a cometre errors, com succeix a la pàgina 193 de l'edició catalana del *Dimoni dels nombres*:

"Molt bé —va contestar en Robert. Tenia molta curiositat per veure què sortiria a la pantalla gran.

$$\begin{aligned}
1:1 &= 1\\
2:1 &= 2\\
3:2 &= 1,5\\
5:3 &= 1,66666666666\ldots\\
8:5 &= 1,6\\
13:8 &= 1,625\\
21:13 &= 1,615384615\ldots\\
34:21 &= 1,619047619\ldots\\
55:34 &= 1,617647059\ldots\\
89:55 &= 1,618181818\ldots
\end{aligned}$$

"Això és una bogeria -digué en Robert-. Tornen a sortir aquells nombres que no s'acaben mai. El 18 es mossega la cua. I molts dels altres tenen una pinta totalment irracional. [...]".

Ens trobem, doncs, amb un error, perquè cap nombre racional no pot tenir una pinta totalment irracional. Però això, en Robert no ho sap. I no ho sap perquè el nostre dimoni de nyigui-nyogui dels nombres no li ha ensenyat quelcom tan simple com l'*algorisme de divisibilitat*, i el fet que els romanents de la divisió han de ser sempre més petits que el divisor.

Si ho hagués fet, què fàcil seria justificar que la representació decimal d'un nombre racional, tard o d'hora, haurà de ser periòdica, si la divisió no és exacta. Si vull dividir $\frac{p}{q}$, amb $p, q \in \mathbb{N}$, trobaré que els romanents possibles són q, si comptem el zero. Per tant, si mai no surt el zero, tard o d'hora un romanent s'haurà de repetir, i aleshores l'algorisme torna a començar des d'un cert moment. Heus ací la periodicitat dels nombres racionals. Que fàcil! Que clara! Que matemàtica! Que perfecta!

Però encara podem anar més lluny. Un xic de càlcul, no gaire, permet constatar que, si un nombre té una representació decimal periòdica, és necessàriament racional. Aleshores tot consisteix a saber si hi ha nombres que no siguin racionals. Aquests, i només aquests, no admetrien mai una representació decimal periòdica.

Per què no és acceptable aquesta mena de raonaments, en un text en què apareix *una única* fracció contínua, com un bolet, sense cap mena de justificació; en un text en què es parla de succesions infinites —algunes de les quals, com la dels nombres primers, per exemple, i, per cert, si hom no en demostra la infinitud, com pot saber-ho amb certesa?—; en un text en què hi ha la suma de sèries geomètriques decreixents, en què es parla dels diversos tipus d'infinits, etc.?

En què depassa el raonament que hem fet fa un moment, la dificultat de lectura i de comprensió del text? En res! Com podem explicar aquesta mena de mancances? Crec fermament que l'explicació està lligada amb la darrera reflexió que vull fer.

***El dimoni dels nombres* com a alternativa al model educatiu.** En *El dimoni dels nombres*, Enzensberger segueix el mateix model —o un model força semblant— al que feia servir Gaadner en el *Món de Sofia*. L'ensenyament l'hem de realitzar fora del sistema educatiu normal. Aquest és totalment incapaç de transmetre il·lusions, intuïcions, coneixements, amor per les matèries que s'estudien. Els professors dels centres educatius són, qui en dubta!, uns incompetents. Per això cal recórrer a mags i a dimonis. Ja només falta algun autor que faci servir àngels.

És possible que, avui dia, el sistema educatiu no hagi trobat el seu lloc en una societat complexa, en la qual els nois i noies reben molta informació —atenció amb el binomi informació-formació— fora del recinte i del circuit educatiu. No és pas la meva intenció aprofundir en aquesta qüestió. El lector interessat pot llegir *Cultura i canvi tecnològic*, un excel·lent text de Llorenç Valverde, llegit en l'acte inaugural del curs 1997–1998 de la Universitat de les Illes Balears.

Aquest fet porta certament a realitzar una reflexió profunda i seriosa —però, en cap cas, motivada per qüestions polítiques i econòmiques— de què és i què ha de ser el sistema educatiu. I de com ha de ser. Però aquesta reflexió cal plantejar-la des del vessant cultural, social, humà en el sentit integral de la paraula. En aquest nou renaixement de la informació i la comunicació creixents, cal retrobar, en el marc de les idees humanístiques, què és i què volem que sigui l'ésser humà. Només a partir de la resposta a aquesta pregunta tindrà sentit replantejar el sistema educatiu, i retornar a l'esperit de Jacobi segons el qual "la finalitat última de la ciència —jo diria de la cultura, del coneixement— és la de retre homenatge a l'esperit humà".

En tot cas, el que no val és plantejar la solució del sistema educatiu al marge de la globalitat del sistema social en què ha d'estar immers. Qui no sap que la millor manera d'educar i ensenyar és la individualitzada. Si només hi ha un alumne, què fàcil! I, si és un alumne ben dotat, quin privilegi!

El problema real esdevé quan la societat es planteja un objectiu socialment —però no sempre educativament— més ambiciós i més equitatiu. Fer arribar l'ensenyament —els coneixements que la humanitat ha anat acumulant amb el pas dels segles, amb l'estudi, l'experiència, la reflexió, l'esforç físic i intel·lectual— a un ventall tan ampli de discents com sigui possible. A tots i cada un dels nois i noies —i, més encara, de dones i homes— de la nostra societat.

Quina és aleshores la situació en què es troba el qui ha d'ensenyar matemàtiques, filosofia, llengua, història, física, biologia, dibuix, llatí, etc.? No si val a fer trampa! No si val a defugir responsabilitats! Cal afrontar el repte, o rebutjar-lo. Però, en qualsevol cas, el que no podem admetre és aquesta mena de menyspreu, tantes vegades repetit, devers els nostres mestres i professors –molts d'ells autènticament professionals, i amb un esperit molt lloable, malgrat els resultats visibles–, com si ells fossin els únics i definitius responsables de la situació; incapaços de transmetre coneixements, se'ls ha de comdemnar col·lectivament.

Cal un mag, o un dimoni, potser una divinitat per fer que un sol alumne aprengui quelcom? No, i mil vegades no! En tot cas, i aquesta seria la qüestió, potser sí que cal per tal que "tots ho aprenguem tot". I aquesta és la qüestió!

"Els coneixements, tots els coneixements, són als llibres" –deia sovint el professor Sales. Però aleshores, podem preguntar-nos lícitament, què hi fan els professors? Per què els necessitem? Ell responia, dient: "Hi posen els gestos".

Jo ho diria d'una manera una mica diferent. El mestre, el professor, el docent, hi posen l'exigència. Han de fer la feina dura! Han d'aconseguir amb paciència, amb enginy, amb professionalitat que l'alumne aprengui, *tot esforçant-se*. Cal "fer dits". El mestre ha d'obligar —deixeu-me ser redundant, té l'obligació d'obligar— a fer dits. Cal transmetre allò que ensenya precisament quan és dur, monòton i feixuc. Ser un bon mestre vol dir, al meu entendre, fer comprendre a aquells que estan sota la tutela docent que cal esforçar-se, que no s'aprèn res si no hi ha col·laboració entre l'alumne i el professor, i una àmplia participació de l'estudiant. Perquè —no ho oblidem– qui realment estudia és l'estudiant.

L'altre dia, parlant amb en Josep M. Font d'un programa d'una assignatura de 30 hores que, per ser desenvolupat amb una mica de correcció i d'exigència, en necessitava almenys tres vegades més, em va fer una reflexió molt interessant. Em va dir:

—"Començo a estar una mica fart d'aquesta tendència actual de convertir les classes en conferències. Molta informació, no sempre adequada ni intel·ligent, i poca exigència, cap dificultat, i gens de participació de la banda del discent".

La considero una observació molt ajustada, sobretot en aquests dies en què sembla que fer didàctica consisteix a buscar la manera d'evitar l'esforç i la participació actives dels qui tenen, com a únic objectiu, l'estudi. Si volem ensenyar, si volem fer llibres, tant si són llibres didàctics com de divulgació, el que no podem fer mai és escapolir-nos de les dificultats inherents a allò de què estem parlant, ni tampoc no podem presentar-nos com a quixots que "desfem allò que està mal fet", allò que ens volen ensenyar els Bockels que hi ha a les escoles d'arreu. N'estic totalment convençut, avui encara calen mestres. Sense mestres, ara com ara, no hi pot haver ensenyament. Però sense rigor, esforç, i exigència no és possible aprendre.

És un lloc comú dir que l'ensenyament ha de ser participatiu. Res més encertat. I alhora res més falaç. Si participatiu significa que l'estudiant ha de participar activament en el procés docent immediat, que és responsabilitat del porfessor, m'atreveixo a dir que estem incorrent en contradicció. Si participatiu significa que l'estudiant té un lloc en el procés educatiu —sensiblement diferent del del seu mestre—, crec que tots hi guanyarem.

És per totes aquestes raons —i encara n'hi ha d'altres que ometo— que considero que el llibre d'Ensenzerger és negatiu. Si a tot això hi afegiu la quantitat de vegades —suposo que vol ser una manera de fer-lo més creïble i real— que el seu únic deixeble diu que el que fan "és avorrit?, "un pal", "pesat", etc., hem de concloure que, malgrat la situació de privilegi del nostre demoniet, la seva manera d'ensenyar no fa gaire atractiu allò que està ensenyant. I potser la raó és, precisament, que no està ensenyant com cal.

No hi entenc gaire de dimonis, però potser tots el dimonis tenen una situació de privilegi. Cada dimoni té assignat un únic ésser humà a qui temptar. I molts dimonis tempten els nois i noies que els han tocat, dient-los: "Per què t'has d'esforçar amb aquestes coses tan avorrides quan podries jugar a futbol, mirar la "tele", passar un CD-ROM divertit per l'ordinador? De què serveix saber traduir un text de llatí, si aquesta llengua és una llengua morta? Quin interès té saber resoldre aquesta equació de segon grau, si el HP de butxaca ho pot fer per tu? No cal que li facis cas al teu professor o professora! Què saben, pobres mortals? Deixa't dur, i t'ensenyaré un món que només serà teu, sense obligacions, on no caldrà que t'esforcis. Ningú no et demanarà comptes!

El llibre *El dimoni dels nombres* és negatiu perquè és una temptació, una fal·làcia, un engany. En definitiva, és fals, negatiu, i rèprobe.

The fontana History of the Mathematical Sciences

The fontana History of the Mathematical Sciences d'Ivor Grattan-Guinnes.
Fontana Press. HarperCollins Publishers. Londres, 1997.

L'altre text, el de l'insigne historiador anglès de la matemàtica, és el pol contrari del que acabem de comentar. És un llibre escrit per una persona d'una gran formació i cultura. Això es nota fins i tot quan s'escriu sobre matemàtiques.

Podem dir que el text, que té més de vuitcentes pàgines, és una història de butxaca. Està pensada per poder ser llegida per un ampli ventall de lectors. Això la fa absolutament diferent de l'excel·lent obra de John Stilwell, *Mathematics and its History*, publicada a la col·lecció *Undergraduate Texts in Mathematics* de Springer-Verlag. Aquesta està escrita pensant en els estudiants i professionals de la matemàtica, i és una història temàtica. En ella, Stilwell presenta algunes qüestions que considera rellevants en el desenvolupament històric de la tasca realitzada pels matemàtics al llarg dels segles, des de la Grècia clàssica. Es presenten des d'un vessant matemàtic, i això fa que, a vegades, l'exposició sigui una mica massa tècnica per poder ser entesa per un lector que no conegui certs aspectes, terminologia, problemes i mètodes matemàtics.

El text de Grattan-Guinness, en canvi, és molt menys ambiciós, si volem dir-ho així. Com el seu títol indica, pretén d'apropar-nos a la matemàtica, d'una manera força particular. Perquè el que l'autor ens ofereix no és estrictament una *història de la matemàtica*. És una història de les *ciències matemàtiques*.

Podríem pensar que això és un simple joc de paraules, que no té cap mena d'importància. Ens equivocaríem de ple. I aquest fet constitueix ja, per si sol, una sorpresa molt agradable, i amb moltes possibilitats.

La intenció de l'autor —i crec que ho aconsegueix força— consisteix a mostrar la matemàtica com una ciència que s'ha anat forjant a mesura que l'home s'ha anat plantejant certes qüestions. Segons el moment històric en què es trobi el coneixement humà, les preguntes seran unes o bé unes altres. I això fa que les respostes, incloses les respostes matemàtiques, també siguin diferents. Saber presentar, amb poques paraules, una situació, veure de quina manera influeix en la matemàtica del moment, fer una síntesi clara de per què la matemàtica d'un cert període de la història fou la que va ser, esbrinar com i per què certes qüestions que fins aleshores no l'havien influït gaire, o gens, o no l'havien influït d'aquella manera concreta, em sembla que no és una tasca que pugui dur a terme qualsevol de nosaltres. Cal un coneixement molt més ampli que el de la matemàtica, una certa finor en l'anàlisi de la societat en què la ciència s'està desenvolupant, i de les circumstàncies del moment, com també de les preocupacions que es vivien, i alhora dels problemes que se li plantejaven a la matemàtica i als matemàtics, conscientment o inconscient, i als quals havien de dedicar la seva atenció perquè havien esdevingut objectes de la seva consideració.

No vull pas estendre'm excessivament en el comentari del *The fontana History of the Mathematical Sciences*, i per això em referiré a alguns dels trets que considero més notables. Són també els que l'autor considera com a més notables, els quals exposa amb una claredat molt gran a §1.3 *Strategy and purpose*, i complementa en els tres paràgrafs següents.

El primer que cal remarcar és el fet que, en la majoria d'històries generals de la matemàtica, més de les dues terceres parts estan dedicades a la matemàtica desenvolupada des de l'antiguitat fins a finals del segle XVIII. El segle XIX i el primer terç del segle XX queden reduïts a menys d'una tercera part de l'obra. Per exemple, el magnífic llibre de Victor J. Katz, *The History of Mathematics. An Introduction*, dedica 15 capítols —que corresponen a 584 pàgines— a la primera part, mentre que els segles XIX i XX són liquidats amb 4 capítols —als quals corresponen menys de dues-centes pàgines. Aquest fet es repeteix en la majoria dels llibres d'història [general] de la matemàtica. D'aquesta afirmació cal excloure'n l'obra, força més monumental que les altres, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* de Morris Kline.

El *The fontana* té precisament com a un dels seus objectius fer una presentació àmplia del segle XIX i del primer terç del segle XX.

> Moltes històries tracten del món antic, de l'edat mitjana i del Renaixement amb una certa extensió, però els períodes posteriors són molt menys extensos relativament als avencos matemàtics que hi van tenir lloc i, en particular, *el segle dinou* es tracta d'una manera superficial. Aquí l'equilibri s'inverteix, i es dediquen 9 capítols a aquest segle. És probablement un desequilibri en l'altre sentit; però, sense que això signifiqui cap mena menyspreu pels períodes més antics, les matemàtiques desenvolpudes des del 1800 estan normalment molt més en contacte amb el matemàtic o l'estudiant actuals. A elles orientem, doncs, aquest llibre.

Val a dir —deixeu-m'hi insistir per tal que ningú no s'enganyi— que el llibre està pensat per a un ventall ampli de lectors; com a mínim per a historiadors i filòsofs de la ciència, per a estudiants de matemàtiques, i per a matemàtics. Això fa que el nivell de tecnicismes i de concrecions, a voltes, deixi un cert regust a poc, com si t'haguessis quedat amb gana. Tanmateix, però, la capacitat de síntesi, l'objectivitat i universalitat en la presentació dels temes, l'acurada preocupació per posar de manifest la necessitat d'aconseguir els resultats que es desenvolupen—tant quan la necessitat és interna com quan és externa a la pròpia matemàtica— són realment lloables.

Quanta cultura matemàtica que conté aquest llibre! És impressionant, si tenim en compte que és una història general.

Aquest fet, disposar d'una presentació històrica àmplia, acurada —en primera aproximació, naturalment!— de la matemàtica del segle XIX i començaments del segle XX, fa que el llibre de Grattan-Guinness sigui molt adequat, si hom vol tenir una visió panoràmica del desenvolupament global de tota la història de la matemàtica, des dels orígens fins l'any 1920. A més, i això pot ser molt important en certs àmbits docents, motivada pas a pas.

Podem dir, sense equivocar-nos, que el *leitmotif* del llibre és ben precís. Determinar de quina manera les necessitats primàries dels pobles primitius —i no tan primitius— van empènyer el coneixement a desenvolupar una matemàtica més o menys incipient? De quina manera influeix en la forma de pensar dels matemàtics la necessitat de fer servir la raó, per damunt de tot, com a eina gairebé exclusiva del coneixement, una exigència que els filòsofs grecs havien imposat a tot pensament humà? O bé, quina és la importància real que els comerciants italians, holandesos, i d'altres contrades varen tenir en el desenvolupament impressionant de l'aritmètica algorísmica del sistema decimal indioaràbig que, en desenvolupar-se, anava aplanant el terreny del desvetllament algèbric, com varen posar de manifest, ara ja fa alguns anys, els amics Antoni Malet i Jaume Paradís en *Els orígens i l'ensenyament de l'àlgebra simbòlica*?

Moltes són les qüestions laterals que posa de manifest el text de Grattan-Guinness per tal de justificar cada una de les conquestes matemàtiques: la influència de l'islam, i a través d'ella dels coneixements orientals, en el desvetllament europeu; la influència dels artistes -pintors i dibuixants- en la conquesta de certes formes alternatives de copsar el món visual, i la seva influència en la concepció geomètrica; la col·laboració entre monarques, dibuixants, navegants, mestres d'aixa, rellotgers, etc., per plantejar i resoldre problemes, aparentment molt pràctics —rellotges, calendaris, mapes, ulleres, telescopis, etc.—, i el desenvolupament matemàtic i fisicomatemàtic inherent.

No vull estendre'm pas en tots i cada un dels temes que analitza l'obra que estic comentant, però tampoc no vull passar per alt una de les més ben tractades i que més preocupa l'autor, com ell mateix manifesta:

> Moltes històries eviten mostrar *la importància del món físic* com a font del progrés matemàtic. Aquest fet, contràriament, per contrast, és central en el meu llibre, això fa que el ventall de tòpics que es descriuen aquí sigui molt més ampli del que és normal trobar en històries generals. Aquest extrem és d'una significació especial a mitjan segle XIX, un moment en el qual el naixement de la professió de matemàtic va provocar una cert *esnobisme* que oposava la matemàtica pura a la matemàtica aplicada, una actitud ben desafortunada que es manté encara en les històries generals. [...]

En aquest aspecte és aconsellable la lectura del naixement del càlcul diferencial i integral al segle XVII. És difícil trobar històries que posin de manifest fins a quin punt les intuïcions astronòmiques i físiques de Nikolaus Copèrnic, Johannes Kepler, Galileo Galilei, Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz, entre d'altres, van suscitar les idees necessàries per assolir el desenvolupament del càlcul diferencial. És força ben acceptat que ambdós processos estan lligats, però difícilment se'ns mostren les raons que sustenen aquesta afirmació. Grattan-Guinness ho intenta, i diria que, atesa la naturalesa del seu text, ho aconsegueix amb escreix.

Tampoc no omet, un altre fet oblidat massa sovint, com és la integració en la matemàtica de la *probabilitat i l'estadística*. Grattan-Guinness diu que una de les causes d'aquest oblit és el fet de la seva incorporació tardana, posterior a la Gran Guerra. Ell, però, no vol deixar-la totalment de banda, i més atesa la seva implicació en àrees noves, com ara les ciències socials.

Procura fer, diu, una història que doni algun tipus de resposta a la pregunta "Com tingué lloc?" i no pas a la pregunta, més corrent, de "Què va passar en el passat?" Limita, però, la resposta a aquelles qüestions que, posteriorment, han influït en la matemàtica que avui coneixem.

No s'acaba aquí l'aportació de l'eminent erudit, ni del treball recopilat en el text. A banda de l'enorme esforç de síntesi de tantes i tantes històries de la matemàtica, l'autor té cura de dotar-nos d'una bibliografia, d'una banda molt rònega, i alhora, d'una altra banda, més que suficient per poder ampliar totes i cada una de les qüestions i afirmacions que fa, tant quan són estrictament matemàtiques com quan són col·laterals. No tracta cap tema, limitant allò que diu a la seva autoritat. Tots estan convenientment documentats en treballs específics, i consegüentment més especialitzats. La bibliografia té més de cinc-centes cites bibliogràfiques entre llibres i articles.

En definitiva, el text de Grattan-Guinness és una d'aquelles obres que, al meu entendre, cal tenir. És, de fet, amb les seves vuit-centes pàgines un llibre petit, divulgatiu. És un panorama, i una panoràmica, de la cultura de la humanitat en l'àmbit més estricte de les ciències matemàtiques. Però, en el seu context i àmbit, és excel·lent! He disfrutat moltíssim llegint-lo! Per això vull, d'una banda, agrair a l'amic Pelegrí Viader el fet d'haver-me'l regalat, quan en desconeixia totalment la seva existència, abans que no el trobés esmentat enlloc; i, d'una altra, recomanar-lo com un gran llibre d'història de les ciències matemàtiques a tots els qui senten interès per aquesta mena de qüestions.

En tot cas, és una d'aquelles obres que cal tenir per poder consultar sempre que convingui. Si no hi trobem ben bé allò que ens interessa, és gairebé segur que hi trobarem un camí que ens hi portarà. I això és així, tant si busquem quelcom relacionat amb la probabilitat, com amb la geometria, o amb l'anàlisi, o amb qualsevol altra branca de la matemàtica, des d'una perspectiva històrica àmplia.

Grattan-Guinnes fa la millor síntesi, quan diu:

> [...] La paraula 'arc iris' no ens ha de portar a tenir la impressió que la matemàtica és tan sols un espectre bidimensional amb uns límits ben determinats. Al contrari, ens ha de suggerir dues analogies molt més pregones.
>
> La primera analogia, que és la primera lliçó d'aquest llibre, és la *varietat estupenda i àmplia* del domini d'activitats en què les matemàtiques han jugat un paper significatiu. Això els hi proporciona una ubiqüitat única en la història de les idees, i també en la vida moderna.
>
> La segona analogia té un marcat contrast amb la primera. La història de la matemàtica és gairebé sempre absent de la 'cultura' de la gent educada, inclosos els historiadors i els matemàtics. L'extensió d'aquest fet s'ha de viure per creure. Però, com un arc iris, les matemàtiques poden ser admirades, però —especialment entre els intel·lectuals— es mantenen a una certa distància, ben lluny de la vida real i de la conversa culta. Però també, a l'igual que l'arc iris, la matemàtica es manté al seu lloc quan te li apropes, i admet amb tota simplicitat l'investigador actiu que s'endinsa en el seu univers de colors.

No em queda res més per dir. Només demanar als professors de matemàtiques, no només que el llegeixin, sinó que el recomanin, si estan d'acord amb el meu punt de vista, és clar, i que el manegin. En definitiva que li donin vida.

Comprenc que fóra molt més fàcil d'aconseguir-ho si poguéssim, entre tots, trobar una editorial que el traduís al català, o al castellà. Jo m'he adreçat a algunes però totes l'han refusat. "A qui pot interessar una altra història de les matemàtiques? De fet, la història és una, i per tant amb una sola història ja n'hi ha prou" —m'han arribat a dir.

Res més fals! La història és un *constructe* de l'historiador. La presentació, els objectius, els èmfasis són essencials, i fan que la història sigui d'una manera o d'una altra. No hi ha una història objectiva. Hi ha històries subjectives, i és precisament saber trobar el punt adequat en la subjectivitat que l'historiador vessa en la *seva* visió de la història el que la pot fer més objectiva. Grattan-Guinness, amb aquesta història tan personal i subjectiva, ens proporciona un excel·lent text d'història de les ciències matemàtiques, i punt.

Beques i ajuts

Beca Pere Menal

La Universitat Autònoma de Barcelona ofereix cada any, des de 1994, una beca amb el nom del professor Pere Menal i Brufal (1951–1991) a l'estudiant amb la millor qualificació a les proves d'accés a la universitat d'entre tots els sol·licitants que s'hagin matriculat a la Llicenciatura de Matemàtiques de la UAB.

La beca comporta la matrícula gratuïta de totes les assignatures de la Llicenciatura de Matemàtiques, a més d'una quantitat anual de 30.000 pessetes en concepte d'adquisició de llibres. Les sol·licituds s'han de presentar a l'Àrea d'Alumnes de la UAB, entre l'1 de juliol i el 31 d'octubre del curs acadèmic en què es demana la beca. Per a més informació, podeu adreçar-vos a la Secretaria del Departament de Matemàtiques de la UAB (tel. 93 581 1304).

La beca corresponent al curs que ara acaba, 1997–1998, va ser atorgada a l'alumna **Alejandra María Alonso Díaz,** a qui donem l'enhorabona.